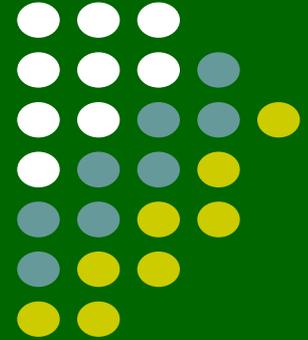


# Computerzahlen





# Rechnen



Zeige, dass nachfolgende Formel korrekt ist.

$$\frac{1}{\sqrt{a+b} - \sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a+b} + \sqrt{a}}{b}$$



# Rechnen



Kein Problem mithilfe der binomischen Formel:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{a+b}-\sqrt{a}} &= \frac{\sqrt{a+b}+\sqrt{a}}{(\sqrt{a+b}-\sqrt{a})\cdot(\sqrt{a+b}+\sqrt{a})} \\ &= \frac{\sqrt{a+b}+\sqrt{a}}{b}\end{aligned}$$



# Rechnen



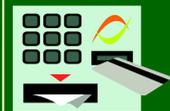
Setze  $a = 10^5 = 100000$  und  $b = 10^{-4} = 0,0001$ .

Berechne die linke und die rechte Seite separat mit dem Taschenrechner und vergleiche.

$$\frac{1}{\sqrt{a+b} - \sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a+b} + \sqrt{a}}{b}$$



# Rechnen



Setze  $a = 10^5 = 100000$  und  $b = 10^{-4} = 0,0001$ .

Berechne die linke und die rechte Seite separat mit dem Taschenrechner und vergleiche.

$$\frac{1}{\sqrt{a+b} - \sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a+b} + \sqrt{a}}{b}$$

$$6329113,924 = 6324555,322$$



# Rechnen



Setze  $a = 10^5 = 100000$  und  $b = 10^{-4} = 0,0001$ .

Berechne die linke und die rechte Seite separat mit dem Taschenrechner und vergleiche.

$$\frac{1}{\sqrt{a+b} - \sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a+b} + \sqrt{a}}{b}$$

$$6329113,924 = 6324555,322$$





# Rechnen



Erstelle in einer Tabellenkalkulation eine Liste der Potenzen der Zahl 2. Nutze eine Formel.

1
2
4
8
16
32
64
128
256
512
1024



# Rechnen



Erstelle in einer Tabellenkalkulation eine Liste der Potenzen der Zahl 2. Nutze eine Formel.

1  
2  
4  
8  
16  
32  
64  
128  
256  
512  
1024

8796093022208  
17592186044416  
35184372088832  
70368744177664  
140737488355328  
281474976710656  
562949953421312  
1125899906842620  
2251799813685250  
4503599627370500  
9007199254740990



# Rechnen



Erstelle in einer Tabellenkalkulation eine Liste der Potenzen der Zahl 2. Nutze eine Formel.

1  
2  
4  
8  
16  
32  
64  
128  
256  
512  
1024

8796093022208  
17592186044416  
35184372088832  
70368744177664  
140737488355328  
281474976710656  
562949953421312  
1125899906842620  
2251799813685250  
4503599627370500  
9007199254740990





# Rechnen



Wieso rechnet das System fehlerhaft?



# Rechnen



Was wissen wir schon über Dezimal- und Binärzahlen?



# Rechnen



Wie viele Dezimalzahlen kann man mit 3 Bit darstellen?

$2^3 = 8$ : Also 0 ... 7

Dezimal	$2^2$	$2^1$	$2^0$	Berechnung
0	0	0	0	$0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$
1	0	0	1	$0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$
2	0	1	0	$0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$
3	0	1	1	$0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$
4	1	0	0	$1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$
5	1	0	1	$1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$
6	1	1	0	$1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$
7	1	1	1	$1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$

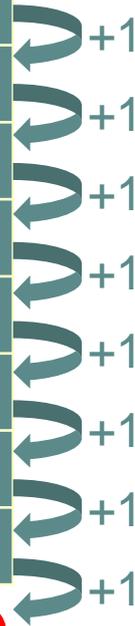


# Rechnen



## Probleme?

Dezimal	$2^2$	$2^1$	$2^0$	Berechnung
0	0	0	0	$0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$
1	0	0	1	$0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$
2	0	1	0	$0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$
3	0	1	1	$0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$
4	1	0	0	$1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$
5	1	0	1	$1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$
6	1	1	0	$1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$
7	1	1	1	$1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$





## Konsequenzen

1996 Start Ariane-5

Explosion 40 s nach Start

Ursache: Zahlüberlauf

Schaden: 370 Millionen \$





# Rechnen



Kann man auch negative ganze Zahlen darstellen?

→ **Codierung:** höherwertigstes Bit wird negativ betrachtet:

Dezimal	$2^2$	$2^1$	$2^0$	Berechnung
0	0	0	0	$-0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$
1	0	0	1	$-0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$
2	0	1	0	$-0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$
3	0	1	1	$-0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$
	1	0	0	$-1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$
	1	0	1	$-1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$
	1	1	0	$-1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$
	1	1	1	$-1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$



# Rechnen



Kann man auch negative ganze Zahlen darstellen?

→ **Codierung:** höherwertigstes Bit wird negativ betrachtet:

Dezimal	$2^2$	$2^1$	$2^0$	Berechnung
0	0	0	0	$-0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$
1	0	0	1	$-0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$
2	0	1	0	$-0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$
3	0	1	1	$-0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$
-4	1	0	0	$-1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$
-3	1	0	1	$-1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$
-2	1	1	0	$-1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$
-1	1	1	1	$-1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$



# Rechnen



## Probleme?

Dezimal	$2^2$	$2^1$	$2^0$	Berechnung
0	0	0	0	$-0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$
1	0	0	1	$-0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$
2	0	1	0	$-0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$
3	0	1	1	$-0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$
-4	1	0	0	$-1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$
-3	1	0	1	$-1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$
-2	1	1	0	$-1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$
-1	1	1	1	$-1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$

A large blue curved arrow on the left points from the bottom row (-1) to the top row (0), labeled '+1'. On the right side of the table, a series of blue wavy arrows point from the right towards the 'Berechnung' column, each labeled '+1'. A red question mark is positioned to the right of these arrows.



# Rechnen



## Probleme?

```
Die eingegebene Zahl war die 15.  
... und das sind die 10 Nachfolger:
```

```
16  
17  
18  
19  
20  
21  
22  
23  
24  
25
```

```
Die eingegebene Zahl war die 120.  
... und das sind die 10 Nachfolger:
```

```
121  
122  
123  
124  
125  
126  
127  
-128  
-127  
-126
```



# Rechnen



Kann man auch Kommazahlen darstellen?

→ **Codierung:** Zweierexponenten negativ

Dezimal	$2^1$	$2^0$	$2^{-1}$	Berechnung
0	0	0	0	$0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^{-1}$
	0	0	1	$0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^{-1}$
	0	1	0	$0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^{-1}$
	0	1	1	$0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^{-1}$
	1	0	0	$1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^{-1}$
	1	0	1	$1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^{-1}$
	1	1	0	$1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^{-1}$
	1	1	1	$1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^{-1}$



# Rechnen



Kann man auch Kommazahlen darstellen?

→ **Codierung:** Zweierexponenten negativ

Dezimal	$2^1$	$2^0$	$2^{-1}$	Berechnung
0	0	0	0	$0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^{-1}$
0,5	0	0	1	$0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^{-1}$
1	0	1	0	$0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^{-1}$
1,5	0	1	1	$0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^{-1}$
2	1	0	0	$1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^{-1}$
2,5	1	0	1	$1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^{-1}$
3	1	1	0	$1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^{-1}$
3,5	1	1	1	$1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^{-1}$



## Probleme?

Diskrete Dezimalzahlen!

```
>>> 0.1+0.2
```

```
0.30000000000000004
```

$\frac{1}{10}$  ist bspw. nicht als endliche Binärzahl darstellbar



# Rechnen



## Probleme?

Problem des Weiterrechnens:  $0,1 \cdot 11 - 1 = 0,1$

B3		
: × ✓ <i>f<sub>x</sub></i> =(B2*11)-1		
	A	B
1	<b>Schritt</b>	<b>Zahl</b>
2	0	0,1000000000000000
3	1	0,1000000000000000



# Rechnen



	A	B
2	0	0,10000000000000
3	1	0,10000000000000
4	2	0,10000000000000
5	3	0,10000000000000
6	4	0,10000000000001
7	5	0,10000000000013
8	6	0,1000000000143
9	7	0,1000000001573
10	8	0,1000000017308
11	9	0,1000000190389
12	10	0,1000002094278
13	11	0,1000023037061
14	12	0,1000253407669
15	13	0,1002787484356
16	14	0,1030662327916
17	15	0,1337285607073
18	16	0,4710141677807
19	17	4,1811558455875
20	18	44,9927143014627
21	19	493,9198573160900
22	20	5432,1184304769800
23	21	59752,3027352468000
24	22	657274,3300877150000
25	23	7230016,6309648700000
26	24	79530181,9406135000000
27	25	874832000,3467490000000
28	26	9623152002,8142400000000
29	27	105854672029,9570000000000
30	28	1164401392328,5200000000000
31	29	12808415315612,7000000000000
32	30	140892568471739,0000000000000



# Rechnen



## Konsequenzen

1991 US-Patriot-Rakete tötet 28 US-Soldaten

Keine Zielgenauigkeit

Ursache: Zeit in  $\frac{1}{10}$  s gespeichert

Je länger die Laufzeit umso größer die Zeitdifferenz

100 Stunden  $\rightarrow$  0,34 Sekunden Gangunterschied:

Rakete fliegt mit 6000 km/h  $\rightarrow$  in 0,34 s ca. 570 m!



# Rechnen



## Fazit

Dezimalzahlen lassen sich auf unterschiedliche Weise codieren. Einem Code allein sieht man nicht an, welche Zahl (oder welches Zeichen) sich dahinter verbirgt!

→ Dunkles Zeitalter der Digitalisierung





# Rückfragen

