Sprachen und Automaten

Tino Hempel

11

Bisherige Automaten

Automat mit Ausgabe/Mealy-Automat

Akzeptor, Sprache eines Akzeptors

→ Grenze: $L = \{a^n b^n\}$

Kellerautomat → erkennt $L = \{a^n b^n\}$

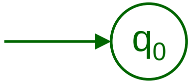
→ Grenze: ?

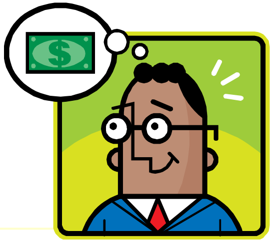
Grenze des Kellerautomaten

Die 2-Millionen-Euro-Aufgabe:

Entwickeln Sie einen Kellerautomaten A, der die Sprache

$$L(A) = \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbf{N}, n > 0\}$$
$$= \{abc, aabbcc, aaabbbccc, \ldots\} \text{ mit } X = \{a,b,c\} \text{ erkennt.}$$

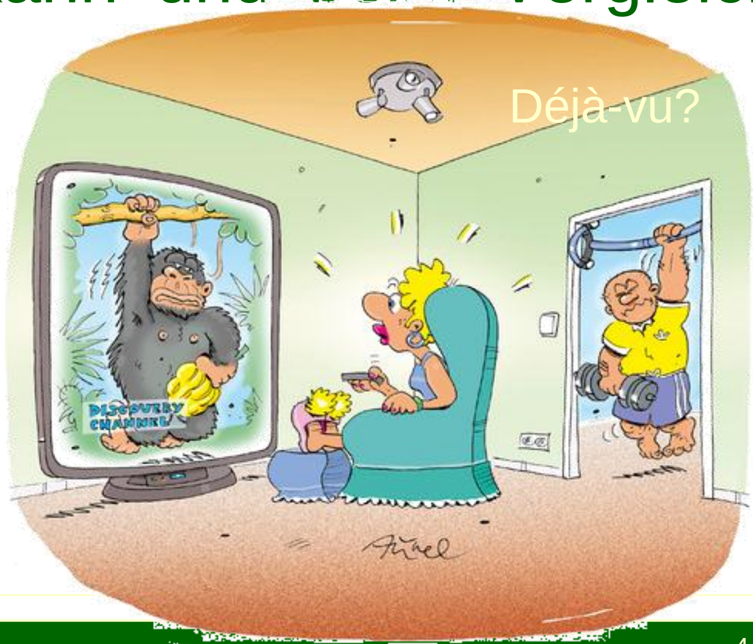




Grenze des Kellerautomaten

Es ist **nicht möglich**, einen Kellerautomaten A zu konstruieren, der die Sprache $L(A) = \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbf{N}, n > 0\}$ mit $X = \{a, b, c\}$ erkennt, da er stets nur auf das obere Zeichen des Kellers zugreifen kann und beim Vergleich Zeichen löschen muss.

Es gibt also (mindestens eine) Sprache(n), für die man keinen Kellerautomaten bauen kann.



Turingmaschine

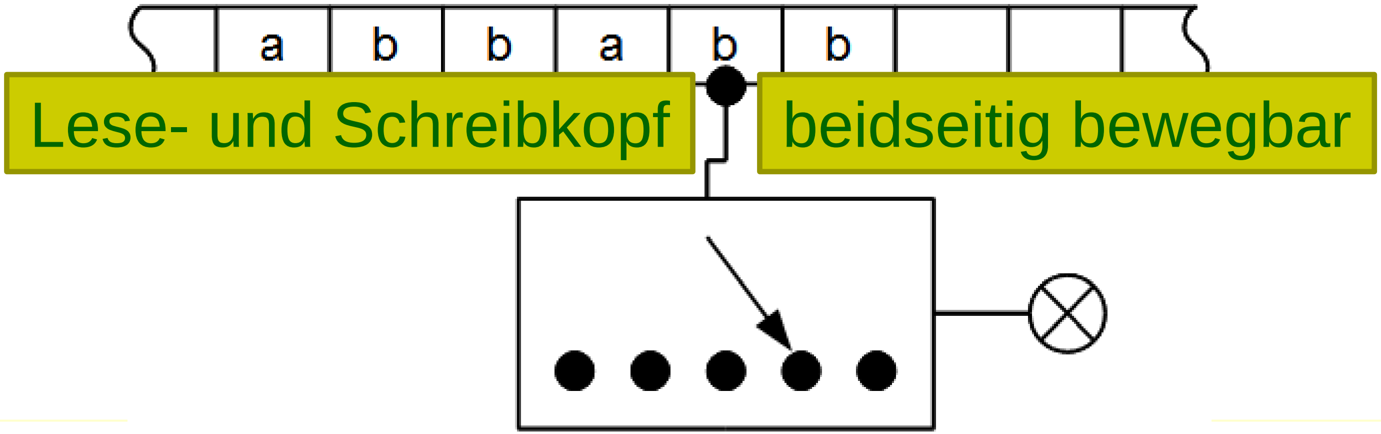
1936: Idee des Alan Turing (1912 – 1954)

Statt Kellerspeicher

→ Eingabeband wird beschreibbar

→ Lesekopf wird zum Lese- **und** Schreibkopf

→ Kopf ist beidseitig bewegbar



Turingmaschine

Eine **Turingmaschine** TM = $(X, Z, \Gamma, \delta, q_0, \$, Z_E)$ wird definiert durch:

- X … Eingabealphabet (nichtleere, endliche Menge)
- Z … Zustandsmenge (nichtleere, endliche Menge)
- Γ … Bandalphabet (nichtleere, endliche Menge)
- δ … eine (nicht vollständig definierte) Überführungsfunktion, welche jedem Paar (Eingabezeichen, Zustand) eine Ausgabe, eine Bewegung und einen Folgezustand zuordnet
- $q_0 \in Z$ ist der Anfangszustand
- $\$ \in \Gamma$ ist das Bandvorbelegungszeichen
- $Z_E \subseteq Z$ ist die Menge der Endzustände

Akzeptieren eines Wortes

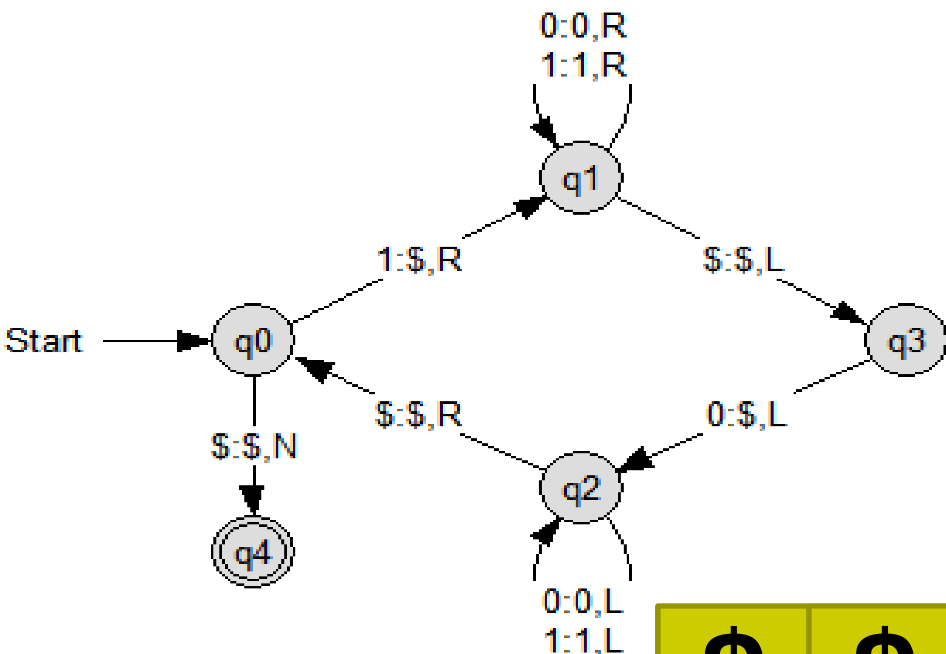
Ein Wort wird nur dann akzeptieret, wenn ein Endzustand erreicht wurde.

Darstellung des Automatengraph

Turingmaschine

Beispiel für eine Turingmaschine

Sprache $L(A) = \{1^n0^n \mid n \in N, n \geq 0\}$ mit $X = \{0,1\}$



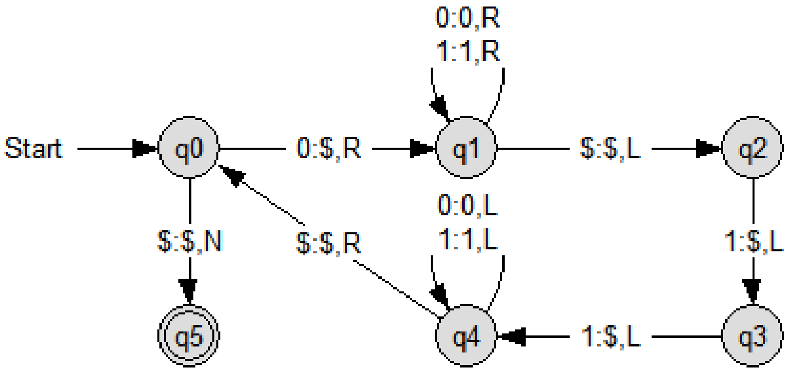
δ	$	0	1
q0	(q4,$,N)	-	(q1,$,R)
q1	(q3,$,L)	(q1,0,R)	(q1,1,R)
q3	-	(q2,$,L)	-
q2	(q0,$,R)	(q2,0,L)	(q2,1,L)
q4	-	-	-

$	$	1	1	0	0	$	$

Übungen

Untersuchen Sie die folgende Turingmaschine TM.

1. Bestimmen Sie X, Z, Z_E, Γ.
2. Untersuchen Sie die Arbeitsweise von TM für die Wörter w_1 = 011, w_2 = 00111 und w_3 = 001111
3. Bestimmen Sie die Sprache des Automaten.



Übungen

Entwickeln Sie eine Turingmaschine TM, die die Sprache

$L(A) = \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbf{N}, n > 0\}$

mit $X = \{a,b,c\}$ erkennt.

Automatenübersicht

Turingmaschine
(erkennt auch Kellerautomat- und Akzeptorsprachen)

Kellerautomat (erkennt auch Akzeptor-Sprachen)

→ Grenze: $L = \{a^n b^n c^n\}$

Akzeptor → „einfache“ Sprachen

→ Grenze: $L = \{a^n b^n\}$

Wir erinnern uns:

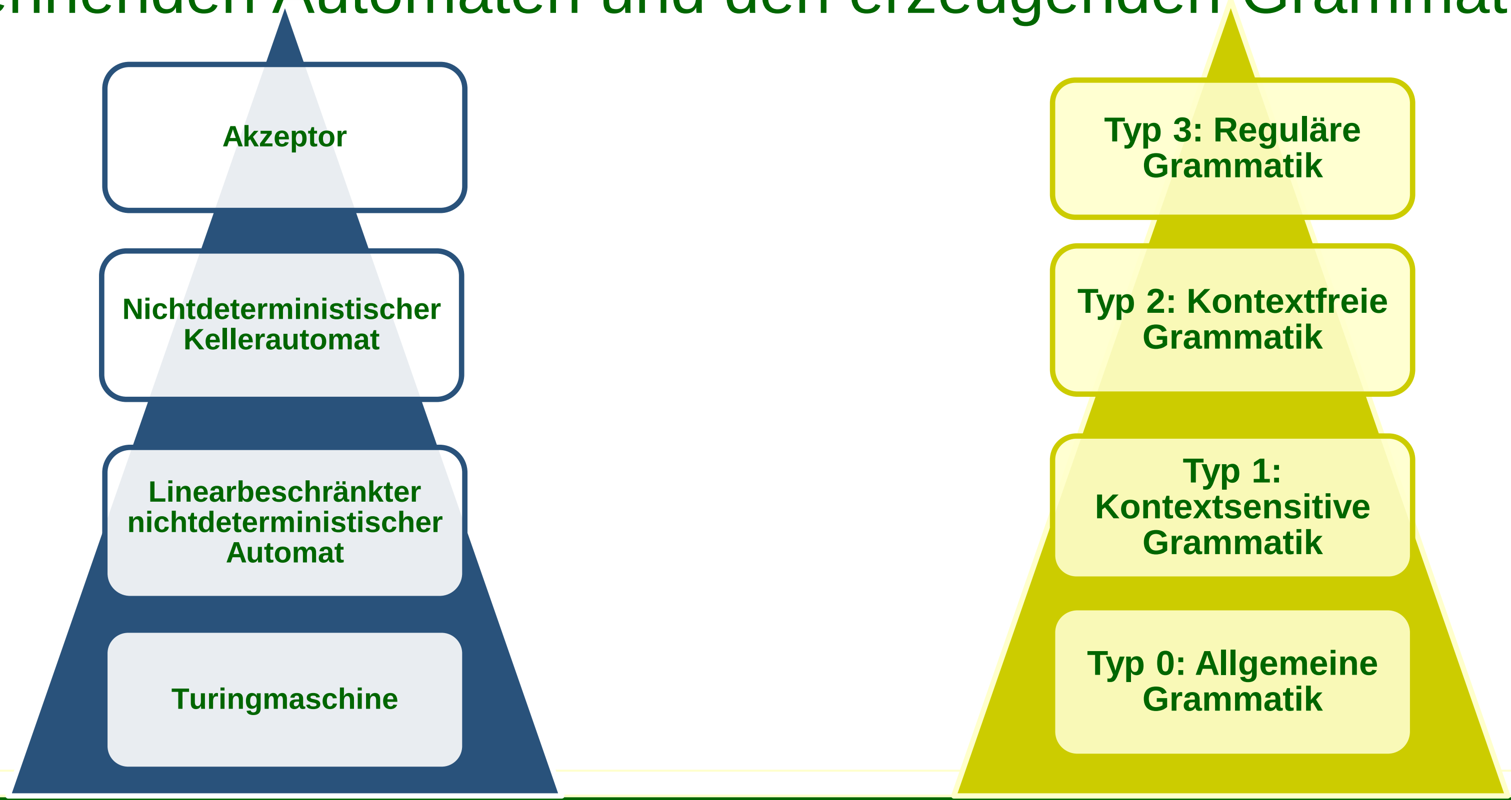
Noam Chomsky (*1928) – untersuchte Grammatiken und entwickelte eine Einteilung dieser

Ergebnis (1959):

- Grammatiken lassen sich mit Hilfe eines mathematischen Modells beschreiben
- Grammatiken werden darin definiert als 4-Tupel mit G = (N, T, P, S)
- Grammatiken lassen sich hierarchisch einordnen **(vier Typen)**

Automaten und Grammatik

Man kann zeigen: Es gibt eine Äquivalenz zwischen den erkennenden Automaten und den erzeugenden Grammatiken.



Chomsky-Hierarchie

Typ 0

- Jede formal definierbare Grammatik.

Typ 1

- Wenn zusätzlich für alle Regeln u → v gilt:
  die Worte auf der rechten Seite einer Regel sind mindestens so lang, wie die auf der linken Seite ($|u| \leq |v|$).

Typ 2

- Wenn zusätzlich für alle Regeln u → v gilt:
  u ist eine einzelne Variable.

Typ 3

- Wenn zusätzlich für alle Regeln u → v gilt:
  auf der rechten Seite ist entweder ein einzelnes Terminalzeichen oder ein Terminalzeichen gefolgt von einer Variablen (linkslinear).

Chomsky-Hierarchie

Bestimmen Sie den höchsten Chomsky-Typ und die generierte Sprache für die Grammatik $G = (V, T, R, S)$ mit $T = \{a, b\}$, $V = \{S\}$, $R = \{S \rightarrow ab \mid aSb\}$. Entwickeln Sie einen erkennenden Automaten.

Chomsky-Hierarchie

Bestimmen Sie den höchsten Chomsky-Typ und die generierte Sprache für die Grammatik G = (V, T, R, S) mit T = {a, b} , V = {S, W}, R = {S → aW, W → bW | b}.
Entwickeln Sie einen erkennenden Automaten.

Chomsky-Hierarchie

Bestimmen Sie den höchsten Chomsky-Typ und die generierte Sprache für die Grammatik G = (V, T, R, S) mit
T = {a, b, c, d}, V = {S, A},
R = {S → aSTU | aTU,

aT → ab, bT → bb, bU → bc, cU → cc,

UT, → UW, UW → VW, VW → VU, VU → TU}.

Entwickeln Sie einen erkennenden Automaten.

Rückfragen