Computerzahlen

Rechnen

Zeige, dass nachfolgende Formel korrekt ist.

$$\frac{1}{\sqrt{a+b}-\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a+b}+\sqrt{a}}{b}$$

Rechnen

Kein Problem mithilfe der binomischen Formel:

$$\frac{1}{\sqrt{a+b}-\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a+b}+\sqrt{a}}{(\sqrt{a+b}-\sqrt{a})\cdot(\sqrt{a+b}+\sqrt{a})}$$

$$= \frac{\sqrt{a+b}+\sqrt{a}}{b}$$

Rechnen

Setze a = 10^5 = 100000 und b = 10^{-4} = 0,0001.

Berechne die linke und die rechte Seite separat mit dem Taschenrechner. Vergleiche die Ergebnisse.

$$\frac{1}{\sqrt{a+b}-\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a+b}+\sqrt{a}}{b}$$

Rechnen

Setze a = 10^5 = 100000 und b = 10^{-4} = 0,0001.

Berechne die linke und die rechte Seite separat mit dem Taschenrechner. Vergleiche die Ergebnisse.

$$\frac{1}{\sqrt{a+b}-\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a+b}+\sqrt{a}}{b}$$

$$6329113,924 = 6324555,322$$

Rechnen

Setze $a = 10^5 = 100000$ und $b = 10^{-4} = 0{,}0001$.

Berechne die linke und die rechte Seite separat mit dem Taschenrechner. Vergleiche die Ergebnisse.

$$\frac{1}{\sqrt{a+b}-\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a+b}+\sqrt{a}}{b}$$

$$6329113{,}924 = 6324555{,}322$$?

Rechnen

Erstelle in einer Tabellenkalkulation eine Liste der Potenzen der Zahl 2, also 2^0, 2^1, 2^2, … Nutze eine Formel.

1
2
4
8
16
32
64
128
256
512
1024

Rechnen

Erstelle in einer Tabellenkalkulation eine Liste der Potenzen der Zahl 2, also 2^0, 2^1, 2^2, … Nutze eine Formel.

1	8796093022208
2	17592186044416
4	35184372088832
8	70368744177664
16	140737488355328
32	281474976710656
64	562949953421312
128	1125899906842620
256	2251799813685250
512	4503599627370500
1024	9007199254740990

Rechnen

Erstelle in einer Tabellenkalkulation eine Liste der Potenzen der Zahl 2, also 2^0, 2^1, 2^2, … Nutze eine Formel.

1
2
4
8
16
32
64
128
256
512
1024

8796093022208
17592186044416
35184372088832
70368744177664
140737488355328
281474976710656
562949953421312
1125899906842620
2251799813685250
4503599627370500
9007199254740990

?

Rechnen

Wieso rechnen Taschenrechner oder die Tabellenkalkulation fehlerhaft?

Rechnen

Wir wissen:

Computer verwenden Binärzahlen.

Dezimalzahlen lassen sich in Binärzahlen umwandeln.

Binärzahlen lassen sich in Dezimalzahlen umwandeln.

Rechnen

Wie viele Dezimalzahlen kann man mit 3 Bit darstellen?

$2^3 = 8$, also 0 … 7

Dezimal	2^2	2^1	2^0	Berechnung
0	0	0	0	$0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$
1	0	0	1	$0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$
2	0	1	0	$0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$
3	0	1	1	$0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$
4	1	0	0	$1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$
5	1	0	1	$1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$
6	1	1	0	$1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$
7	1	1	1	$1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$

Was passiert für 7 + 1?

Dezimal	2^2	2^1	2^0	Berechnung
0	0	0	0	$0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$
1	0	0	1	$0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$
2	0	1	0	$0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$
3	0	1	1	$0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$
4	1	0	0	$1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$
5	1	0	1	$1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$
6	1	1	0	$1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$
7	1	1	1	$1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$

+1
+1
+1
+1
+1
+1
+1

Rechnen

Was passiert für 7 + 1?

Dezimal	2^2	2^1	2^0	Berechnung
0	0	0	0	$0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$
1	0	0	1	$0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$
2	0	1	0	$0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$
3	0	1	1	$0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$
4	1	0	0	$1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$
5	1	0	1	$1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$
6	1	1	0	$1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$
7	1	1	1	$1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$

+1
+1
+1
+1
+1
+1
+1
+1

?

Wir benötigen ein weiteres Bit!

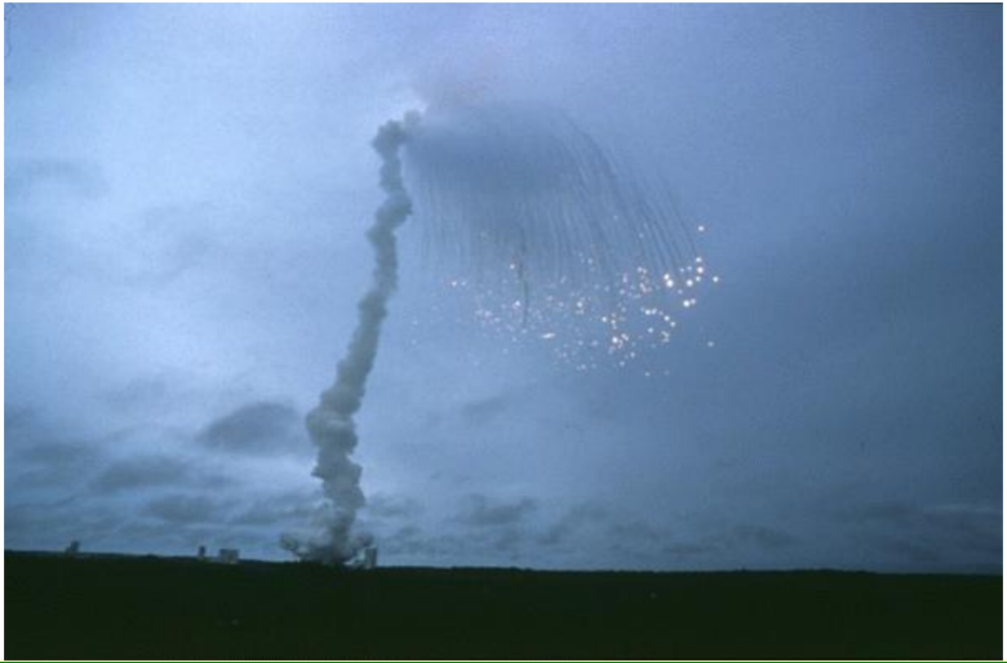
Wenn wir dies aber nicht reserviert haben, dann …?

Rechnen

1996 Start Ariane-5 → Explosion 40 s nach Start

Ursache: Zahlüberlauf (Overflow)

Schaden: 370 Millionen US Dollar



Rechnen

Wie viele Dezimalzahlen kann man mit 3 Bit darstellen?

$2^3 = 8$, also **nur** 0 … 7?

Rechnen

Codierung: Höherwertigstes Bit wird negativ betrachtet.

Dezimal	2^2	2^1	2^0	Berechnung
0	0	0	0	$-0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$
1	0	0	1	$-0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$
2	0	1	0	$-0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$
3	0	1	1	$-0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$
	1	0	0	$-1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$
	1	0	1	$-1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$
	1	1	0	$-1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$
	1	1	1	$-1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$

Rechnen

Codierung: Höherwertigstes Bit wird negativ betrachtet.

Dezimal	2^2	2^1	2^0	Berechnung
0	0	0	0	$-0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$
1	0	0	1	$-0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$
2	0	1	0	$-0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$
3	0	1	1	$-0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$
-4	1	0	0	$-1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$
-3	1	0	1	$-1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$
-2	1	1	0	$-1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$
-1	1	1	1	$-1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$

Rechnen

Was passiert bei 3 + 1?

Dezimal	2^2	2^1	2^0	Berechnung
0	0	0	0	$-0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$
1	0	0	1	$-0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$
2	0	1	0	$-0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$
3	0	1	1	$-0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$
-4	1	0	0	$-1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$
-3	1	0	1	$-1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$
-2	1	1	0	$-1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$
-1	1	1	1	$-1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$

? Wie können wir das verhindern oder anzeigen?

Rechnen

Entwicklung des Kampfflugzeug F-16:

Autopilot rollt F16 in Rückenlage, wenn Äquator überflogen

```
Die eingegebene Zahl war die 15.
... und das sind die 10 Nachfolger:
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
```

```
Die eingegebene Zahl war die 120.
... und das sind die 10 Nachfolger:
121
122
123
124
125
126
127
-128
-127
-126
```

Rechnen

Wie viele Dezimalzahlen kann man mit 3 Bit darstellen?

$2^3 = 8$. Kann man damit auch Brüche darstellen?

Rechnen

Codierung: Zweierexponenten negativ

Dezimal	2^1	2^0	2^{-1}	Berechnung
0	0	0	0	$0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^{-1}$
	0	0	1	$0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^{-1}$
	0	1	0	$0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^{-1}$
	0	1	1	$0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^{-1}$
	1	0	0	$1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^{-1}$
	1	0	1	$1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^{-1}$
	1	1	0	$1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^{-1}$
	1	1	1	$1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^{-1}$

Rechnen

Codierung: Zweierexponenten negativ

Dezimal	2^1	2^0	2^{-1}	Berechnung
0	0	0	0	$0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^{-1}$
0,5	0	0	1	$0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^{-1}$
1	0	1	0	$0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^{-1}$
1,5	0	1	1	$0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^{-1}$
2	1	0	0	$1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^{-1}$
2,5	1	0	1	$1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^{-1}$
3	1	1	0	$1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^{-1}$
3,5	1	1	1	$1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^{-1}$

Rechnen

Probleme?

Es sind nur bestimmte Dezimalzahlen möglich!

$\frac{1}{10}$ ist bspw. nicht als **endliche** Binärzahl darstellbar.

→ 0,1 lässt nicht nur ungenau darstellen.

```
>>> 0.1+0.2
0.30000000000000004
```

Rechnen

Probleme?

Weiterrechnen mit nicht exakt darstellbaren Zahlen:

$0{,}1 \cdot 11 - 1 = 0{,}1$

B3 =(B2*11)-1

	A	B
1	Schritt	Zahl
2	0	0,1000000000000
3	1	0,1000000000000

Rechnen

	A	B
2	0	0,1000000000000
3	1	0,1000000000000
4	2	0,1000000000000
5	3	0,1000000000000
6	4	0,1000000000001
7	5	0,1000000000013
8	6	0,1000000000143
9	7	0,1000000001573
10	8	0,1000000017308
11	9	0,1000000190389
12	10	0,1000002094278
13	11	0,1000023037061
14	12	0,1000253407669
15	13	0,1002787484356
16	14	0,1030662327916
17	15	0,1337285607073
18	16	0,4710141677807
19	17	4,1811558455875
20	18	44,9927143014627
21	19	493,9198573160900
22	20	5432,1184304769800
23	21	59752,3027352468000
24	22	657274,3300877150000
25	23	7230016,6309648700000
26	24	79530181,9406135000000
27	25	874832000,3467490000000
28	26	9623152002,8142400000000
29	27	105854672029,9570000000000
30	28	1164401392328,5200000000000
31	29	12808415315612,7000000000000
32	30	140892568471739,0000000000000

Jede Angabe in der Spalte B sollte 0,1 sein!

Rechnen

1991: US-Patriot-Rakete tötet 28 US-Soldaten

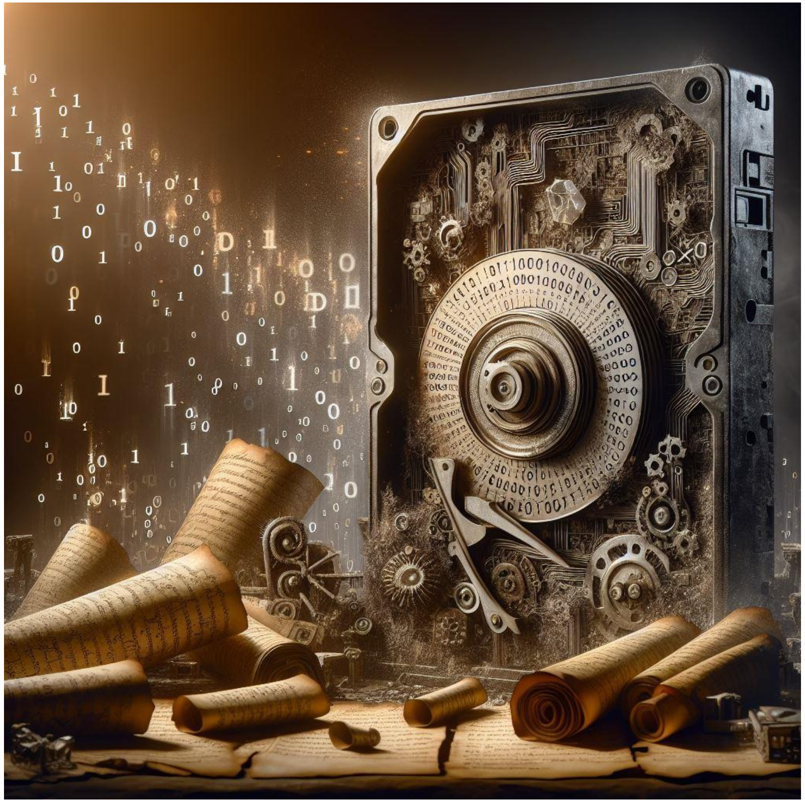
- Ursache: Zeit in $\frac{1}{10}$ s gespeichert
- Je länger die Betriebszeit der Rakete,
  desto größer die Zeitdifferenz!
- nach 100 Stunden Betriebszeit
  → 0,34 Sekunden Gangunterschied zur echten Zeit
- Bei 6000 km/h machen 0,34 s Unterschied
  bereits ½ km Längenunterschied aus!

Rechnen

Dezimalzahlen lassen sich auf unterschiedliche Weise codieren.

Einem Code sieht man nicht an, welche Zahl oder welches Zeichen sich dahinter verbirgt!

Dunkles Zeitalter der Digitalisierung



Rückfragen